あるderivationで書かれる多重ゼータ値の予想関係式について (代数的整数論とその周辺)

井原, 健太郎

数理解析研究所講究録
1154 巻 2000 年 182-190

ある derivation で書かれる多重ゼータ値の予想関係式について

九州大学数理学研究科 井原 健太郎 (Kentaro Ihara)

0 はじめに

多重ゼータ値 (multiple zeta values) とは、次の級数で定義される実数である。

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}} \in \mathbf{R},$$

$$k_1, \cdots, k_n \in \mathbf{N},\ k_n \geq 2.$$

定義にはいくつか流儀があるが、ここでは D.Zagier 氏の用法に従うことにする [Z]。$n=1$ のときが、Riemann ゼータの特殊値に他ならない。多重ゼータ値は K-Z 方程式の monodromy や、Drinfel'd の quasi-Hopf algebra、また絡み目や、実 3 次元多様体の universal invariant など、多くの分野に顔を出し、興味を持たれている対象でもある。

Riemann ゼータの奇数点での値も含め、具体値は不明なものが多いが、多重ゼータ値の間には $\mathbf{Q}$-係数の線形関係式や代数関係式が多く存在することが予想され、実際、色々な形の関係式が様々なプロセスで発見されている。(脈絡なく、具体例を列挙すると、$\zeta(3)=\zeta(1,2)$, $\zeta(4)=\zeta(1,3)+\zeta(2,2)$, $\zeta(5)=6\zeta(1,4)+2\zeta(2,3)$, $\zeta(2)\zeta(3)=\zeta(5)+\zeta(2,3)+\zeta(3,2)$. このようなものを関係式と呼んでいるわけである。)

その一つとして、'98 年頃に金子昌信先生により予想されたある線形関係式 (の族) は、多くの関係式を導き出す点と、"derivation" を使って定義されるという点でユニークなもので [K1]、更に、それまでに大野泰生氏により示されていた関係式 [O] (この関係式はそれまでに知られていた関係式の多くを一般化した強い関係式) と同値であろうことが、同時に予想されている。見た目が全く異なる二つの関係式が同値 (?) という背景にどの様なからくりがあるのか。この予想関係式を証明することだけでなく、"両関係式の関わり" にも興味が湧く。

この動機のもと、数理研の発表では予想関係式の低次部分 (4 次以下) の成立と低次部分限定 (3 次以下) だが両関係式の同値性の成立について述べた。この原稿では、述べられなかった証明などを詳しく書きたいと思う。

だがごく最近、金子-Zagier 両氏により一般に両関係式が同値であることが示され、従って、予想関係式の成立が証明された。その証明は、今回与えた低次部分の証明の延長にあるものだが、両関係式の関わりを鮮明に記述した証明である。この詳細については現在、改稿中だが [IK] を参照してほしい。ということで、この原稿の意義は薄いかもしれないが、一般の証明への 1 つのステップとして、両関係式間の興味深い関わりの一端を見てほしい。

1 基本問題とその予想

多重ゼータ値に関する基本問題と、それについて予想されていることについて述べよう。多重ゼータ値 $\zeta(k_1,k_2,\dots,k_n)$ に対して、和 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ を weight、変数の個数 n を depth と呼んでいる。$k_n=1$ とすると、定義の級数は発散するため、条件 $k_n\geq 2$ が課せてある。低い weight (≤ 5) のものを並べてみると、

wt. 2	$\zeta(2)$
wt. 3	$\zeta(3),\ \zeta(1,2)$
wt. 4	$\zeta(4),\ \zeta(1,3),\ \zeta(2,2),\ \zeta(1,1,2)$
wt. 5	$\zeta(5),\ \zeta(1,4),\ \zeta(2,3),\ \zeta(1,1,3),\ \zeta(3,2),\ \zeta(1,2,2),\ \zeta(2,1,2),\ \zeta(1,1,1,2)$

weight k の多重ゼータ値は 2^{k-2}個ある。(ただし、先に例示したように $\zeta(3)=\zeta(1,2)$ であったりするので、異なる index set の多重ゼータ値は別物として数えた個数である。)

定義 $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{Q}$ 上の線形空間とみて、その部分空間として、$\mathcal{Z}_0=\boldsymbol{Q}$、$\mathcal{Z}_1=\{0\}$、$k\geq 2$ に対して、$\mathcal{Z}_k$ =*weight* が k の多重ゼータ値全部が張る $\boldsymbol{Q}$ 上の線形空間、と定める。そして、それらの和空間を $\mathcal{Z}:=\sum_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$ とおく。

$\mathcal{Z}_k(k\geq 2)$ は先の個数勘定から、高々 2^{k-2} 次元の線形空間だが、weight k の多重ゼータ値間の線形関係式を見つけることで、$\dim\mathcal{Z}_k$ の上限が reduce されるわけである。 そこで、

問題 $\dim\mathcal{Z}_k$ はいくらか？

この問題に対して、次の予想がある。

予想 $d_k:=\dim\mathcal{Z}_k$ は次の線形漸化式で与えらるだろう。

$$d_0=1,\ d_1=0,\ d_2=1,\ d_k=d_{k-3}+d_{k-2},\ (k\geq 3).$$

d_kの予想値の表が 3 節の表 1 にある。

注 $\mathcal{Z}$ は単に線形空間であるだけでなく、$\mathbf{Q}$-algebra であることが示されている (!)。(つまり多重ゼータ値と多重ゼータ値の積は多重ゼータ値らの $\mathbf{Q}$-線形結合でかける。) この予想はその $\mathcal{Z}$ の algebra 構造についてのある予想から帰結されたものである。ここでは詳しくは触れないが、予想では $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Z}_k$, $(k=0,1,2,\dots)$ らの直和であろうと信じられている: $\mathcal{Z}=\bigoplus_{k\geq 0}\mathcal{Z}_k$. つまり、weight が違う多重ゼータ値間に線形関係はなかろうということである。実際、今までに知られている線形関係式は全て weight を保っている。しかし、この直和性は多重ゼータ値らが有理数か否かとか、$\mathbf{Q}$-上一次独立かどうかとかを含んだ、難しい問題である。(詳しくは [K2],[Z] 及び、[K2] の文献を参照のこと。)

2 反復積分表示と設定

多重ゼータ値は定義の級数表示のほかに、反復積分による表示がある。

(多重ゼータ値の反復積分表示.)

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=$$
$$\underbrace{\int_0^1\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{t}\cdots\int_0^t\frac{1}{t}}_{k_n-1}\int_0^t\frac{1}{1-t}\underbrace{\int_0^t\frac{1}{t}\cdots\int_0^t\frac{1}{t}}_{k_{n-1}-1}\int_0^t\frac{1}{1-t}\cdots\underbrace{\int_0^t\frac{1}{t}\cdots\int_0^t\frac{1}{t}}_{k_1-1}\int_0^t\frac{1}{1-t}.$$

反復積分は右から解いていくものとする。この表示が級数表示と等しいことをみるには、最右の $\frac{1}{1-t}$ の巾級数展開 $\sum_{i\geq 0}t^i$ から順に項別積分して、最後に $t=1$ を代入すると、多重ゼータ値の定義級数が現れることからわかる。“t で割って積分” するたびに index の weight が 1 つずつ加算され、“$1-t$ で割って積分” するところで depth が 1 つ増すのである。weight k の多重ゼータ値の表示では、積分の反復数が k で、最右の積分因子 $\frac{1}{1-t}$ と最左の積分因子 $\frac{1}{t}$ ($k_n\geq 2$ のためそうなる。) が決まっていることから、両端を除いた残り $k-2$ ヶ所に因子 $\frac{1}{t}$ or $\frac{1}{1-t}$ を入れることで、2^{k-2}個全ての多重ゼータ値が表示される。

積分因子 $\frac{1}{t}$ を文字 x、積分因子 $\frac{1}{1-t}$ を文字 y に対応させ、多重ゼータ値 $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ を 2 変数非可換 word $x^{k_n-1}yx^{k_{n-1}-1}y\ldots x^{k_1-1}y$ とみなす次の設定を導入したのは M.Hoffman である [H2]。

定義 $\mathcal{H}:=\boldsymbol{Q}\langle x,y\rangle$ で $\boldsymbol{Q}$-係数 2 変数非可換多項式環を表し、その部分空間 $\mathcal{H}^0$を $\mathcal{H}^0:=\boldsymbol{Q}+x\boldsymbol{Q}\langle x,y\rangle y$ と定める。(つまり $\mathcal{H}^0$ は定数項以外の項が x で始まり y で終る word からなる多項式の空間。) そして、$\mathbf{Q}$-線形写像 $\tilde{\zeta}:\mathcal{H}^0\longrightarrow\mathcal{Z}$ を

$$\tilde{\zeta}(x^{k_n-1}yx^{k_{n-1}-1}y\ldots x^{k_1-1}y)=\zeta(k_1,\ldots,k_{n-1},k_n)$$

を $\mathbf{Q}$-linear に拡張することで定義する。($\tilde{\zeta}(1)=1$ とする。)

本質的なことではないが、k_i の添字が逆転しているので注意を要する。$\tilde{\zeta}$ は全射な線形写像である。$\mathcal{H}^0$ を通常の積で algebra とみなしても、$\tilde{\zeta}$ は algebra hom. にはなっていない。($\tilde{\zeta}$ を algebra hom. ならしめる $\mathcal{H}^0$ の積が 2 通り存在する cf. [H2], [K1]。) 多重ゼータ値の線形関係式を見つける問題はこの設定のもと、次のように言える。

問題 $Ker\ \tilde{\zeta}$ の元を探せ。

例 $\zeta(3)-\zeta(1,2)=0\Longleftrightarrow x^2y-xy^2\in Ker\ \tilde{\zeta}.$
$\zeta(4)-\zeta(1,3)-\zeta(2,2)=0\Longleftrightarrow x^3y-x^2y^2-xyxy\in Ker\ \tilde{\zeta}.$

3 予想関係式といくつかの既知関係式

$\mathcal{N} := \{\theta \in End\ (\mathcal{H}^0) \mid \theta(\mathcal{H}^0) \subset Ker\ \widetilde{\zeta}\}$ とする。つまり像が関係式になる線形写像全体である。タイトルの予想関係式[1]は次のように書かれる。

予想 (Kaneko) $n \geq 1$ に対して、*$\boldsymbol{Q}$-derivation* $\partial_n : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ を

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y,\ \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$$

で定義する。このとき、$\partial_n \in \mathcal{N}, (n \geq 1)$ であろう。

Q-derivation とは、積が Leibniz rule で展開される **Q**-線形写像のことであり、$\mathcal{H}$ の derivation は x と y の行き先を決めると確定することに注意してほしい。

例 $n = 2$ の場合、$\partial_2(x) = x^2y + xy^2,\ \partial_2(y) = -x^2y - xy^2$ で、

$$\begin{aligned}\partial_2(x^2y) &= \partial_2(x)xy + x\partial_2(x)y + x^2\partial_2(y)\\ &= x^2yxy + xy^2xy + x^2y^3 - x^4y \overset{(?)}{\in} Ker\ \widetilde{\zeta}\\ &\Leftrightarrow \zeta(2,3) + \zeta(2,1,2) + \zeta(1,1,3) - \zeta(5) \overset{(?)}{=} 0.\end{aligned}$$

定理 1 $n \leq 4$ に対して、$\partial_n \in \mathcal{N}$.

証明については、4 節にまわして、この予想関係式とこれまでに知られている関係式との関わりについて触れよう。

次の duality は最も基本的な関係式である。

定理 2 (Duality) *$\boldsymbol{Q}$-線形写像 $\tau : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ を $\tau(x) = y$、$\tau(y) = x$ を anti-algebra hom. として拡張することで定義する。このとき、$1 - \tau \in \mathcal{N}$.*

つまり、τ は word の x と y を入れかえて、逆さにする線形写像のことである。(τは involution であることに注意。)

例 $(1-\tau)(x^2y) = x^2y - xy^2 \in Ker\ \widetilde{\zeta} \Longleftrightarrow \zeta(3) - \zeta(1,2) = 0.$
$(1-\tau)(x^3yxy) = x^3yxy - xyxy^3 \in Ker\ \widetilde{\zeta} \Longleftrightarrow \zeta(2,4) - \zeta(1,1,2,2) = 0.$
$(1-\tau)(x^{k-1}y) = x^{k-1}y - xy^{k-1} \in Ker\ \widetilde{\zeta} \Longleftrightarrow \zeta(k) = \zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-2},2).$

$\zeta(3)$ の dual は $\zeta(1,2)$ である、などという。weigth k、depth n の多重ゼータ値の dual は weigth k、depth $k-n$ となる。この定理は [Z] によると、M.Kontsevich によるとある。証明は、反復積分表示から直ちに導かれる:

[1]冒頭でも述べたように、最近、この予想は証明されました。文献 [IK] を参照してください。

表 1: 各関係式が与える $\dim \mathcal{Z}_k$ の上限

weigt k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
#wt.k の多重ゼータ値	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...
大野関係式	1	1	2	3	6	9	18	30	57	...
予想関係式＋ duality	1	1	2	3	6	9	18	30	57	...
d_kの予想値	1	1	1	2	2	3	4	5	7	...

証) 多重ゼータ値の反復積分表示の積分順序を入れかえて、

$$\begin{aligned}\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n) &= \int_0^1 \frac{dt_k}{t_k}\int_0^{t_k}\cdots\int_0^{t_2}\frac{dt_1}{1-t_1}\\ &= \int_0^1 \frac{dt_1}{1-t_1}\int_{t_1}^1\cdots\int_{t_{k-1}}^1 \frac{dt_k}{t_k}.\end{aligned}$$

ここで変数変換 $(t_1,\ldots,t_k)\longmapsto(1-t_k,\ldots,1-t_1)$ を施すと、$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ と dual な多重ゼータ値の反復積分表示と等しくなるからである。 ∎

定理 3 (Ohno) $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ と $(k'_1,k'_2,\ldots,k'_{n'})$ を互いに *dual* な多重ゼータ値の *index sets* とするとき、任意の非負整数 $\ell\geq 0$ に対して、

$$\sum_{\substack{e_1+e_2+\cdots+e_n=\ell\\ \forall e_i\geq 0}}\zeta(k_1+e_1,k_2+e_2,\ldots,k_n+e_n)=\sum_{\substack{e'_1+e'_2+\cdots+e'_{n'}=\ell\\ \forall e'_i\geq 0}}\zeta(k'_1+e'_1,k'_2+e'_2,\ldots,k'_{n'}+e'_{n'})$$

が成立する。

証明については、文献 [O] を参照してほしい。$\ell=0$ のときが duality で、$\ell=1$ のときが、それまでに知られていた "Hoffman の関係式" [H1] と実質、同値である。この関係式も言いかえると、

定理 4 $\ell\geq 0$ に対して、$\boldsymbol{Q}$-線形写像 $\sigma_\ell:\mathcal{H}^0\longrightarrow\mathcal{H}^0$を、

$$\sigma_\ell(x^{k_n-1}yx^{k_{n-1}-1}y\ldots x^{k_1-1}y)=\sum_{\substack{e_1+e_2+\cdots+e_n=\ell\\ \forall e_i\geq 0}}x^{k_n+e_n-1}yx^{k_{n-1}+e_{n-1}-1}y\ldots x^{k_1+e_1-1}y$$

を $\boldsymbol{Q}$-*linear* に拡張することで定義する。($\sigma_\ell(1)=1$ とする。) このとき、$\sigma_\ell(1-\tau)\in\mathcal{N},(\ell\geq 0)$.

表 1 は weight k の多重ゼータ値の、みかけの個数、大野関係式 (定理 3) と予想関係式＋ duality が与える空間 $\mathcal{Z}_k$ の次元の上限、$d_k=\dim\mathcal{Z}_k$ の予想値を表にしたも

のである。見てとれるように、両関係式ともに、予想値まで次元を落とすには至っていない。またこの表からも観察できるが、[K1] に大野関係式と予想関係式+ duality が同値ではないか？というコメントがある。同値とは、大野関係式で得られる全ての関係式のリストと予想関係式+ duatity で得られる全ての関係式のリストがスカラー倍と和で互いに recover し合えるということ。正確には、$\sigma_\ell(1-\tau)$ $(\ell=0,1,\dots)$ の像の生成する空間 $(\subset \mathcal{H}^0)$ と ∂_n $(n=1,2,\dots)$, $1-\tau$ の像の生成する空間の一致のことである。

4 定理1の証明について

方針 σ_ℓ と ∂_n を次で定義する新たな derivation $D_m, \overline{D}_m$ でそれぞれ書き表して、それを仲介にして、大野関係式を予想関係式に翻訳する。(この方針で逆に予想関係式から大野関係式を recover することも目標である。)

定義 $m\geq 1$ に対して、*$\mathbf{Q}$-derivation* $D_m:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ を $D_m(x)=0,\ D_m(y)=x^m y$ で定義する。また $\overline{D}_m=\tau D_m\tau$ とおく。

$\overline{D}_m:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ は再び $\mathbf{Q}$-derivation で (derivation を involution で挟んでも derivation になる。) $\overline{D}_m(x)=xy^m,\ \overline{D}_m(y)=0$ で特徴づけられる。また、一般に derivation δ,δ'に対して、$[\delta,\delta']:=\delta\delta'-\delta'\delta$ とすると、$[\delta,\delta']$ は再び derivation になるが、x と y の行き先を確認することで、$[D_m,D_n]=0$ と $[\overline{D}_m,\overline{D}_n]=0,\ (n,m\geq 1)$ が示せる。つまり、D_m達は互いに可換で、$\overline{D}_m$達も互いに可換である。

自然数 ℓ の分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$, $(i.e., \lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots,\ \ell=\lambda_1+\lambda_2+\dots)$ に対して、$D_\lambda=D_{\lambda_1}D_{\lambda_2}\dots$ とし、更に $\alpha(\lambda)=\prod_{j\geq 1}j^{m_j}m_j!$ とおく。ここで $m_j=\#\{\lambda_i|\lambda_i=j\}$ である。この記号のもと、

命題 1 $\ell\geq 1$ に対して、

$$\sigma_\ell=\sum_{\lambda:\ell\text{の分割}}\frac{1}{\alpha(\lambda)}D_\lambda$$

が成り立つ。例えば、$\sigma_1=D_1, \sigma_2=(D_2+D_1^2)/2,\ \sigma_3=(2D_3+3D_2D_1+D_1^3)/6,$ $\sigma_4=(6D_4+8D_3D_1+3D_2^2+6D_2D_1^2+D_1^4)/24.$

証) まず、$\mathcal{H}^1:=\mathbf{Q}+\mathcal{H}y$ とし、$z_i:=x^{i-1}y,\ (i\geq 1)$ とおくことで、$\mathcal{H}^1$ を z_i らを不定元とした非可換多項式環とみなす。また、$\Lambda=\mathbf{Q}[[X_1,X_2,\dots]]$ で $X_1,X_2,\dots$ を不定元とした可換な形式的巾級数環を表し、Λ の $\mathcal{H}^1$ への環としての作用を次で定義する。

$$(X_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots X_n^{e_n}\cdots)\cdot(z_{k_1}z_{k_2}\cdots z_{k_n})=z_{k_1+e_1}z_{k_2+e_2}\cdots z_{k_n+e_n}.$$

この作用を用いると D_m と σ_ℓ の $w \in \mathcal{H}^0$ への作用は

$$D_m(w) = (X_1^m + X_2^m + \cdots)\cdot(w),$$
$$\sigma_\ell(w) = (\sum_{\substack{e_1+e_2+\cdots+e_n=\ell \\ \forall e_i \geq 0}} X_1^{e_1}X_2^{e_2}\cdots)\cdot(w)$$

と書ける。これはつまり Λ の作用を用いると、D_m と σ_ℓ の作用がそれぞれ巾和対称多項式と完全対称多項式の作用によって表せるということである。よく知られている完全対称多項式 h_ℓ の巾和対称多項式 p_m による記述 $h_\ell = \sum_{\lambda:\ell\text{の分割}} \frac{1}{\alpha(\lambda)} p_\lambda$ を参照すると (e.g [M])、直ちに結果を得る。 ∎

命題 2 次の等式が成り立つ。

i) $\partial_1 = \overline{D}_1 - D_1$.
ii) $\partial_2 = \overline{D}_2 - D_2 - \frac{1}{2}([\overline{D}_1, D_1] - [D_1, \overline{D}_1])$.
iii) $\partial_3 = \overline{D}_3 - D_3 - ([\overline{D}_2, D_1] - [D_2, \overline{D}_1])$.
iv) $\partial_4 = \overline{D}_4 - D_4 - ([\overline{D}_3, D_1] - [D_3, \overline{D}_1]) - \frac{1}{4}([\overline{D}_2, D_2] - [D_2, \overline{D}_2]) + \frac{1}{4}([[\overline{D}_2, D_1], D_1] - [[D_2, \overline{D}_1], \overline{D}_1])$.

証) 両辺ともに、$\mathcal{H}$ の derivation ゆえ、x と y の行き先が一致することを確認すればいい。 ∎

1つ補題を述べて、定理1を証明しよう。

補題 1 $\mathcal{N}$ は *End* $(\mathcal{H}^0)$ の *sub-algebra* であり、更に次が成り立つ。

i) $\theta \in \mathcal{N},\ \phi \in End\ (\mathcal{H}^0) \Rightarrow \theta\phi \in \mathcal{N}$.
ii) $\phi, \phi' \in End\ (\mathcal{H}^0),\ \phi + \phi' \in \mathcal{N} \Rightarrow \phi + \tau\phi' \in \mathcal{N}$.

証) sub-algebra であることと、*i)* は $\mathcal{N}$ の定義から明らかである。*ii)* は *i)* に $\theta = 1 - \tau \in \mathcal{N}$ (duality) と $\phi = \phi'$ を適用して、$\phi' - \tau\phi' \in \mathcal{N}$ を得るが、これを仮定の $\phi + \phi' \in \mathcal{N}$ から引くと得られる。 ∎

定理1の証) 示したいことは $\partial_n \in \mathcal{N}$ ($n \leq 4$) である。

先ず、$n = 1$ の場合、大野関係式 $\ell = 1$ に補題1,*ii)* を適用すると、$\sigma_1 - \tau\sigma_1\tau \in \mathcal{N}$. 命題1と 命題2,*i)* より $\partial_1 \in \mathcal{N}$ である。

次に $n = 2$ の場合、大野関係式 $\ell = 1, 2$ に命題1 と 補題1,*ii)* を適用すると、$D_1 - \overline{D}_1 \in \mathcal{N}$ と $D_2 + D_1^2 - (\overline{D}_2 + \overline{D}_1^2) \in \mathcal{N}$ を得る。$D_1 - \overline{D}_1$ の右から $D_1 + \overline{D}_1$ を掛けても、補題1,*i)* から $(D_1 - \overline{D}_1)(D_1 + \overline{D}_1) \in \mathcal{N}$ である。これから、$D_2 + D_1^2 - (\overline{D}_2 + \overline{D}_1^2)$ を引き去ると $\overline{D}_2 - D_2 - [\overline{D}_1, D_1] \in \mathcal{N}$ を得る。これは命題2,*ii)* より $\partial_2 \in \mathcal{N}$ である。

次に $n = 3$ の場合、大野関係式の $\ell = 1, 2, 3$ に命題1と補題1,*ii)* を適用すると、$\sigma_\ell - \overline{\sigma}_\ell \in \mathcal{N}$ ($\ell = 1, 2, 3$) を得る。($\overline{\sigma}_\ell = \tau\sigma_\ell\tau$ とおいた。) 命題1により、これは

$D_1-\overline{D}_1\in\mathcal{N}$, $D_2+D_1^2-\overline{D}_2-\overline{D}_1^2\in\mathcal{N}$, $2D_3+3D_2D_1+D_1^3-2\overline{D}_3-3\overline{D}_2\overline{D}_1-\overline{D}_1^3\in\mathcal{N}$ に書きかえられ、補題 $1,i)$ を適用すると、

$$(D_1-\overline{D}_1)\cdot\frac{1}{4}(3D_2+3\overline{D}_2-D_1^2-\overline{D}_1^2-2\overline{D}_1D_1-2D_1\overline{D}_1)\in\mathcal{N},$$
$$(D_2+D_1^2-\overline{D}_2-\overline{D}_1^2)\cdot\frac{3}{4}(D_1+\overline{D}_1)\in\mathcal{N},$$
$$(2D_3+3D_2D_1+D_1^3-2\overline{D}_3-3\overline{D}_2\overline{D}_1-\overline{D}_1^3)\cdot(-\frac{1}{2})\in\mathcal{N}.$$

これらを全て足しあげると、

$$\overline{D}_3-D_3-\frac{3}{4}\left[\overline{D}_2,D_1\right]-\frac{1}{4}\left[\left[D_1,\overline{D}_1\right],\overline{D}_1\right]+\frac{3}{4}\left[D_2,\overline{D}_1\right]+\frac{1}{4}\left[\left[\overline{D}_1,D_1\right],D_1\right]\in\mathcal{N}.$$

後述の補題 2 より $[\overline{D}_2,D_1]=[[D_1,\overline{D}_1],\overline{D}_1]$, $[D_2,\overline{D}_1]=[[\overline{D}_1,D_1],D_1]$ なので命題 $2,iii)$ からこれは $\partial_3\in\mathcal{N}$ である。

最後に $n=4$ 場合、大野関係式の $\ell=1,2,3,4$ より $\sigma_\ell-\overline{\sigma}_\ell\in\mathcal{N}$ ($\ell=1,2,3,4$) である。命題 1 と補題 $1,i)$ から、

$$\begin{aligned}(D_1-\overline{D}_1)\cdot\frac{1}{12}(8(D_3+\overline{D}_3)-3(D_2D_1+\overline{D}_2\overline{D}_1+D_1\overline{D}_2+\overline{D}_1D_2)&\\ -6(\overline{D}_2D_1+D_2\overline{D}_1)+(D_1^3+\overline{D}_1^3)+3(\overline{D}_1D_1^2+D_1\overline{D}_1^2))&\in\mathcal{N},\\ (D_2+D_1^2-\overline{D}_2-\overline{D}_1^2)\cdot\frac{1}{4}(2D_2+2\overline{D}_2-D_1^2-\overline{D}_1^2-\overline{D}_1D_1-D_1\overline{D}_1)&\in\mathcal{N},\\ (2D_3+3D_2D_1+D_1^3-2\overline{D}_3-3\overline{D}_2\overline{D}_1-\overline{D}_1^3)\cdot\frac{1}{3}(D_1+\overline{D}_1)&\in\mathcal{N},\\ (6D_4+8D_3D_1+3D_2^2+6D_2D_1^2+D_1^4-6\overline{D}_4-8\overline{D}_3\overline{D}_1-3\overline{D}_2^2-6\overline{D}_2\overline{D}_1^2-\overline{D}_1^4)\cdot(-\frac{1}{6})&\in\mathcal{N}.\end{aligned}$$

これらを全て足しあげると、

$$\begin{aligned}\overline{D}_4-D_4-(\frac{2}{3}[\overline{D}_3,D_1]+\frac{1}{4}[[D_1,\overline{D}_2],\overline{D}_1]+\frac{1}{12}[[[\overline{D}_1,D_1],\overline{D}_1],\overline{D}_1])+&\\ (\frac{2}{3}[D_3,\overline{D}_1]+\frac{1}{4}[[\overline{D}_1,D_2],D_1]+\frac{1}{12}[[[D_1,\overline{D}_1],D_1],D_1])-&\\ \frac{1}{2}[\overline{D}_2,D_2]+\frac{1}{4}([[\overline{D}_2,D_1],D_1]-[[D_2,\overline{D}_1],\overline{D}_1])&\in\mathcal{N}.\end{aligned}$$

命題 $2,iv)$ と補題 2 よりこれは $\partial_4\in\mathcal{N}$ である。 ∎

補題 2 $n>m\geq 1$ なる任意の n,m に対して、次が成り立つ。

i) $[\overline{D}_n,D_1]=[[D_1,\overline{D}_{n-m}],\overline{D}_m]$.
ii) $[D_n,\overline{D}_1]=[[\overline{D}_1,D_{n-m}],D_m]$.

証) また、x と y の行き先が一致することを確認すればいい。 ∎

同様な方法で、低次部分については予想関係式から大野関係式の recover ができる:

定理 5 $\partial_1, \partial_2, \partial_3 \in \mathcal{N} \Longrightarrow \sigma_\ell - \overline{\sigma_\ell} \in \mathcal{N}, \ (\ell = 1, 2, 3)$.

$\sigma_\ell - \overline{\sigma_\ell} \in \mathcal{N}$ に更に補題 $1, ii)$ (duality) を適用すると、大野関係式 $\sigma_\ell(1-\tau) \in \mathcal{N}$ が recover される。

注 定理1の証明では、$\sigma_\ell(1-\tau) \in \mathcal{N}, (\ell = 0, 1, \ldots, n)$ のみを仮定して $\partial_n \in \mathcal{N}$ が示されていることに注意しておきたい。逆に定理 5 では$\partial_n \in \mathcal{N}$, $(n = 1, 2, \ldots, \ell)$ のみを仮定して $\sigma_\ell - \overline{\sigma_\ell} \in \mathcal{N}$ が示されている。

∂_n の $D_m, \overline{D}_m$ による記述は、どのような Lie element が以下続くのか。また、定理 1 の証明 (定理 5 も) のかなり力ずくな operator calculus が一般にどう実行されるのか。$D_m, \overline{D}_m$, $(m = 1, 2, \ldots)$ らの張る Lie 環が free ではないことも合わさって、事態は行き詰まっていたが、それらは、鮮明に解決されることとなったのである。

最後になりましたが、研究集会で話す機会を下さいました伊原先生と、期間中お世話になりましたスタッフの方々に深く感謝いたします。

参考文献

[H1] Hoffman,M. : Multiple harmonic series, *Pacific J. Math.* **152** (1992), 275-290.

[H2] Hoffman,M. : The algebra of multiple harmonic series, *J. of Algebra* **194** (1997), 477-495.

[IK] Ihara,K.,Kaneko,M. : A note on relations among multiple zeta values, *preprint*, 1999.

[K1] Kaneko,M. : 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数、都立大学数学教室セミナー報告 1997.

[K2] Kaneko,M. : 多重ゼータ値入門、京大数理研講究録、「代数的整数論とその周辺」(1999).

[M] Macdonald,I.G. : Symmetric Functions and Hall Polynomials, *Oxford Science Publications*, 1995.

[O] Ohno,Y. : Generlization of duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. of Number Th.* **74** (1999), 39-43.

[Z] Zagier,D. : Values of zeta functions and thier applications, in ECM volume, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.